NACHKLAUSUR

Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Name, Vorname und Matrikelnummer! Bitte verwenden Sie nur Kugelschreiber oder Tintenfüller, *keinen* Bleistift! Füllen Sie unbedingt dieses Deckblatt aus und geben es zusammen mit Ihrer Klausur ab. Die Klausur ist mit $\geq$ 20 Punkten bestanden – viel Erfolg!

NAME	______________________
VORNAME	______________________
MATRIKELNUMMER	______________________

	K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**Σ**
Punkte	/ 10	/ 10	/ 10	/ 10	/ 10	/ 10	/ 60
Kürzel							

NACHKLAUSUR

[K1] *Yukawa-Potential* **[2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte]**

Betrachten Sie das elektrostatische Potential, $\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}$, das so genannte Yukawa-Potential, das in der Kern- und Elementarteilchenphysik eine große Rolle spielt. Hierbei ist $r = |\vec{r}|$ und $\alpha > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass das Potential für kleine r annähernd dem Coulomb-Potential einer Punktladung entspricht. Worin unterscheidet sich das Potential vom Coulomb-Potential, wenn r groß wird?

(b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

(c) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Verwenden Sie dazu z.B. für $r \neq 0$ den Radialteil des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten: $\Delta\phi(r) = (\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r)\phi(r)$. Bedenken Sie, dass $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$ ist. Es genügt hierbei, das Verhalten von $\rho(\vec{r})$ bei $r = 0$ zu erraten.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (b) oder (c), dass die Gesamtladung Null ist.

[K2] *Multipolentwicklung* **[2 + 4 + 4 = 10 Punkte]**

Der Quadrupoltensor ist definiert als $Q_{jk} = \sum_n q_n \Big(3r_{n,j}r_{n,k} - (\vec{r}_n)^2\delta_{jk}\Big)$. Es gibt die folgenden Punktladungen: Ladungen e bei $\vec{r}_1 = (1,1,0)$ und $\vec{r}_2 = (-1,-1,0)$. Ladungen $-e$ bei $\vec{r}_3 = (1,-1,0)$ und $\vec{r}_4 = (-1,1,0)$. Und eine Ladung $2e$ bei $\vec{r}_5 = (0,0,1)$.

(a) Geben Sie die Gesamtladung q und das Dipolmoment $\vec{p}$ an.

(b) Berechnen Sie den Quadrupoltensor Q. Beachten Sie mögliche Symmetrien.

(c) Diagonalisieren Sie Q, geben Sie also die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren an.

[K3] *Fouriertransformation* **[5 + 5 = 10 Punkte]**

Sei $\vec{V}(\vec{k},\omega)$ die Fourier-Transformierte des Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r},t)$. Hierbei ist die Fourier-Transformation definiert als $f(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3r\, f(\vec{r},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$.

(a) Beweisen Sie die folgenden Beziehungen:
$\partial_t \vec{V}(\vec{r},t) \overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} -\mathrm{i}\omega\vec{V}(\vec{k},\omega)\,,\quad \operatorname{div}\vec{V}(\vec{r},t) \overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} +\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{V}(\vec{k},\omega)\,,\quad \operatorname{rot}\vec{V}(\vec{r},t) \overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} +\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{V}(\vec{k},\omega)\,.$

(b) Folgern Sie mit (a) die Maxwell-Gleichungen für die Fourier-Transformierten der elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{k},\omega)$, $\vec{B}(\vec{k},\omega)$ und der Quellen $\rho(\vec{k},\omega)$, $\vec{j}(\vec{k},\omega)$.

[K4] *Eichinvarianz & Kontinuitätsgleichung* **[3 + 3 + 4 = 10 Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass sich die elektromagnetischen Felder nicht ändern, wenn wir die Potentiale gemäß $\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\psi$ und $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\psi$ ändern, wobei ψ ein beliebiges Skalarfeld ist.

(b) Zeigen Sie, dass es immer ein ψ gibt, so dass $\operatorname{div}\vec{A}' = 0$ gilt. *Hinweis*: Leiten Sie eine Differentialgleichung für ψ her. Diese sollten Sie wiedererkennen, und daraus schließen, dass es dafür auch eine Lösung gibt.

(c) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = 0$ aus den Maxwell-Gleichungen her.

[K5] *Ebene Wellen* **[2 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte]**

Das elektrische Feld einer allgemeinen ebenen Welle hat im Vakuum die Form $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(u)$ mit $u = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$, wobei $\vec{k}$ und ω Konstanten sind. Wir nehmen an, dass $\vec{E}(u)$ für $|u| \gg 1$ verschwindet.

(a) Welche Bedingung müssen $\vec{E}$ und der Wellenvektor $\vec{k}$ erfüllen, damit im Vakuum $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ gilt?

(b) Welchen Wert hat das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}(u)$, das ebenfalls für ausreichend große Argumente verschwindet und die Gleichungen $\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$ und $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ erfüllt?

(c) Welchen Wert muss ω haben, damit im Vakuum $\operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0$ gilt?

(d) Zeigen Sie, dass $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ paarweise orthogonal sind, und dass das elektrische und magnetische Feld überall und jederzeit (bis auf einen konstanten Faktor, der eine Potenz von c ist) gleich groß sind.

[K6] *Polarisation* **[2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte]**

Ein Linear-Polarisationfilter lasse Licht durch, das in Richtung $\vec{L} = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y$ polarisiert ist, und absorbiere das komplementär polarisierte Licht. Ein monochromatischer Lichtstrahl mit Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_z$ und Intensität I treffe auf den Filter auf.

(a) Geben Sie das physikalische elektrische Feld $\vec{E}$ der einfallenden monochromatischen ebenen Welle mit Amplitude $\vec{E}_0$ an. *Hinweis*: physikalische Felder sind reell!

(b) Berechnen Sie daraus das physikalische magnetische Feld $\vec{B}$.

(c) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ und zeigen Sie, dass nach zeitlicher Mittelung für die Intensität gilt: $I = \langle|\vec{S}|\rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\vec{E}_0^2$. *Hinweis*: Es ist $\langle\cos^2(kz-\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$.

(d) Berechnen Sie die Intensität des Lichtes, das durchgelassen (transmittiert) wird, wenn der Lichtstrahl linear polarisiert in der Richtung $\vec{e}_x$ ist.